Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Processos Markovianos de saltos

Seja $\mathcal{S}$ um cj enumerável qquer e $\mathbf{Q} = (q_{xy})_{x,y\in\mathcal{S}}$ uma Q-matriz, i.e., $\mathbf{Q}$ satisfaz $\forall\ x, y \in \mathcal{S}$

(i) $0 \leq q_x := -q_{xx} < \infty$;

(ii) $q_{xy} \geq 0$, se $x \neq y$;

(iii) $\sum_{z\in\mathcal{S}} q_{xz} = 0$.

Obs. $\sum_{z\in\mathcal{S}, z\neq x} q_{xz} = q_x$

Para $x, y \in \mathcal{S}$, sejam

$$\pi_{xy} = \begin{cases} \frac{q_{xy}}{q_x}, & \text{se } q_x \neq 0 \text{ e } x \neq y; \\ 0, & \text{se } q_x = 0 \text{ e } x \neq y. \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_{xx} = \begin{cases} 0, & \text{se } q_x \neq 0; \\ 1, & \text{se } q_x = 0. \end{cases}$$

Então $\mathbf{\Pi} := \{\pi_{xy};\ x, y \in \mathcal{S}\}$ é uma matriz estocástica.

PMSs (cont)

Vamos a seguir construir um processo de saltos (X_t), definindo a cadeia de saltos e depois os tempos de salto.

1) Cadeia de saltos: $(Y_n) \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{\Pi})$, onde μ é a distribuição de X_0.

2) Dada (Y_n), $T_1, T_2, \ldots$ são va's exponenciais independentes com taxas $q_{Y_0}, q_{Y_1}, \ldots$, resp.

Construção de (X_t)

Sejam $\tau_0, \tau_1, \ldots$ va's iid Exp(1). Dada (Y_n), façamos

$$T_{n+1} = \tau_n / q_{Y_n},\ n \geq 0$$

(conv: $\tau_n/0 = \infty$). Note que $T_n > 0\ \forall\ n \geq 1$ qc.

Há 3 casos (como já vimos antes, mais genericamente).

3 casos

1) Se $T_n < \infty \ \forall \ n \geq 1$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \to \infty$ quando $n \to \infty$, então

$$X_t = Y_n, \text{ se } S_n \leq t < S_{n+1} \text{ para algum } n \geq 0 \ (S_0 = 0),$$

está bem definido para todo $t \geq 0$.

2) Se $T_n = \infty$ para algum $n \geq 1$, seja $n^* = \min\{n \geq 1 : \ T_n = \infty\}$, então

$$X_t = Y_n, \text{ se } S_n \leq t < S_{n+1} \text{ para algum } n < n^* \ (S_{n^*} = \infty),$$

está bem definido para todo $t \geq 0$.

3) Se $T_n < \infty \ \forall \ n \geq 1$ e $S_n \to \zeta < \infty$ quando $n \to \infty$, então

$$\begin{aligned} X_t &= Y_n, \text{ se } S_n \leq t < S_{n+1} \text{ para algum } n \geq 0 \\ &= \infty, \text{ se } t \geq \zeta, \text{ onde} \end{aligned}$$

∞ é um pto adicionado a $\mathcal{S}$, está bem definido para todo $t \geq 0$.

$(X_t)_{t \geq 0}$ assim definido é dito *processo Markoviano de saltos (mínimo)* associado a $\mathbf{Q}$. Notação: $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$.

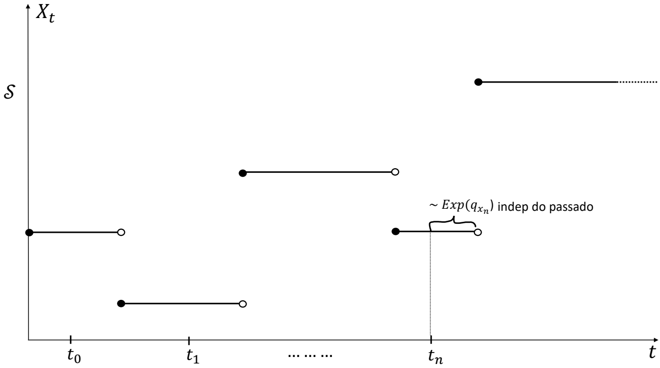
PMS — Ppdde de Markov

Teorema 1

Dados $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ e $x_0, \ldots, x_{n+1} \in \mathcal{S}$,

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_0} = x_0) = \mathbb{P}_{x_n}(X_{t_{n+1}-t_n} = x_{n+1}).$$

Dem. Segue da construção, usando a falta de memória da distr exponencial e ppdde de Markov de (Y_n). $\square$



Construções equivalentes

1) $\{\tau_n^y;\, y \in \mathcal{S},\, n \geq 0\}$ iid Exp(1)

Dado que $Y_n = x$, então faça

$T_{n+1}^y = \tau_n^y / q_{xy}$, $y \neq x$; $\quad T_{n+1} = \inf_{y \neq x} T_{n+1}^y$;

$$Y_{n+1} = \begin{cases} y, & \text{se } T_{n+1} = T_{n+1}^y; \\ x, & \text{se } T_{n+1} = \infty. \end{cases}$$

2) Sejam (N_t^{xy}), $x, y \in \mathcal{S}$, PPs indep c/txs q_{xy}, resp.

Dados Y_0 e $S_0 = 0$, façamos indutiva/e

$S_{n+1} = \inf\{t > S_n : N_t^{Y_n,y} \neq N_{S_n}^{Y_n,y}$ para algum $y \neq Y_n\}$, e

$$Y_{n+1} = \begin{cases} y, & \text{se } S_{n+1} < \infty \text{ e } N_{S_{n+1}}^{Y_n,y} \neq N_{S_n}^{Y_n,y}; \\ Y_n, & \text{se } S_{n+1} = \infty. \end{cases}$$

Obs. Os infs acima estão bem defs pois $\sum_{y \neq x} q_{xy} = q_x < \infty$.

Explosão

Dados $x \in \mathcal{S}$ e uma Q-matriz $\mathbf{Q}$ em $\mathcal{S}$, dizemos que o PMS$(\delta_x, \mathbf{Q})$ é *explosivo a partir de* x se

$$\mathbb{P}_x(S_n \to \zeta < \infty \text{ quando } n \to \infty) > 0. \qquad (1)$$

Do contrário, dizemos que o PMS é *não explosivo a partir de* x.

Teorema 2

Seja $(X_t) \sim$ PMS$(\delta_x, \mathbf{Q})$ como acima. Então (X_t) é não explosivo a partir de x

(i) para todo $x \in \mathcal{S}$, se $\sup_{x \in \mathcal{S}} q_x < \infty$; ou

(ii) se x for recorrente para (Y_n).

Obs. A condição em (i) está sempre satisfeita se $\mathcal{S}$ for finito.

Dem. Usamos a construção de (X_t) com tempos de salto $T_{n+1} = \tau_n / q_{Y_n}$, $n \geq 0$, onde $\tau_0, \tau_1, \ldots$ va's iid Exp(1).

Dem. Teo 2 (cont)

Em (i), seja $q = \sup_{x \in \mathcal{S}} q_x$. Então

$$q\zeta = q \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \infty \text{ qc}$$

Em (iii), vamos supor que $q_x > 0$, do contrário temos uma situação trivial. Então, existe qc uma subsequência $0 = N_0 < N_1 < \cdots$ tq $Y_{N_i} = x$, $i \geq 0$. Logo

$$q_x\zeta \geq \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{N_i} = \infty \text{ qc.} \qquad \square$$

Teorema 3

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$, e ζ o tempo de explosão de (X_t). Fixado $\theta > 0$, seja $z_x = \mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta})$, $x \in \mathcal{S}$. Então $z := (z_x)$ satisfaz:

(i) $|z_x| \leq 1$, $x \in \mathcal{S}$;

(ii) $\mathbf{Q}z = \theta z$.

Além disto, se $\tilde{z}$ satisfizer (i-ii), então $\tilde{z}_x \leq z_x$, $x \in \mathcal{S}$.

Dem. Teo 3

(i) é óbvio;

(ii) Condicionando no 1o salto:

$$z_x = \mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta}) = \sum_{y\neq x} \int_0^\infty dt\, q_x e^{-q_x t} \pi_{xy} e^{-\theta t} \mathbb{E}_y(e^{-\theta\zeta})$$

$$= q_x \sum_{y\neq x} \pi_{xy} z_y \int_0^\infty dt\, e^{-(q_x+\theta)t} = \frac{q_x}{q_x+\theta} \sum_{y\neq x} \pi_{xy} z_y$$

$$\Rightarrow z_x(\theta - q_{xx}) = \textstyle\sum_{y\neq x} q_{xy} z_y \Rightarrow \theta z_x = \sum_y q_{xy} z_y \qquad \square_{ii}$$

O argumento acima pode ser repetido p/obtermos:

$\mathbb{E}_x(e^{-\theta S_{n+1}}) = \sum_{y\neq x} \frac{q_{xy}}{q_x+\theta} \mathbb{E}_y(e^{-\theta S_n}),\ n \geq 0$

Dem. Teo 3 (cont)

Se $\tilde{z}$ satisfaz (i-ii), então

$\tilde{z}_x \leq 1 = \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_0})$, $x \in \mathcal{S}$, e, supondo indutiva/e que

$\tilde{z}_x \leq \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_n})$, $x \in \mathcal{S}$, então, de (ii),

$\tilde{z}_x = \sum_{y \neq x} \frac{q_{xy}}{q_x+\theta} \tilde{z}_y \leq \sum_{y \neq x} \frac{q_{xy}}{q_x+\theta} \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_n}) = \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_{n+1}})$,

e completamos o passo de indução para concluir que

$\tilde{z}_x \leq \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_n})$, $n \geq 0$, e logo

$\tilde{z}_x \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_n}) = \mathbb{E}_x(e^{-\theta \zeta}) = z_x$, $x \in \mathcal{S}$ $\square$

Def. Dizemos que uma Q-matriz $\mathbf{Q}$ em $\mathcal{S}$ é *explosiva* se (1) valer para algum $x \in \mathcal{S}$. Caso contrário, $\mathbf{Q}$ é dita *não explosiva*.

Corolário

Para todo $\theta > 0$, são equivalentes

(i) $\mathbf{Q}$ é não explosiva;

(ii) $\mathbf{Q}z = \theta z$ e $|z_x| \leq 1 \ \forall x \in \mathcal{S} \Rightarrow z \equiv 0$.

Dem. (i $\Rightarrow$ ii)

(i) $\Rightarrow \mathbb{P}_x(\zeta = \infty) = 1 \, \forall x \Rightarrow \mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta}) = 0 \, \forall x$. $\qquad (*)$

Se $\mathbf{Q}z = \theta z$ e $|z_x| \leq 1$, então temos do Teo 3 que

$$\pm z_x \leq \mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta}) \overset{(*)}{=} 0 \Rightarrow z_x = 0 \ .$$

(ii $\Rightarrow$ i)

Do Teo 3, temos que $\mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta})$ satisfaz a premissa de (ii).
Segue então da conclusão de (ii) que

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta}) = 0, \ x \in \mathcal{S} \text{ e, logo, } \mathbb{P}_x(\zeta = \infty) = 1, \ x \in \mathcal{S}. \qquad \square$$